du Préscolaire et des Sports

Note globale	
En chiffres	....../20
En lettres	....

Matière de : ....

Nom et Signature du correcteur : Pr. Yahya MATIOUI

RESERVE A L'ACADEMIE

www.etude-generale.com

BAC SM 2025

Analyse 10pt

NOTATION PARTIELLE

1

Exercice 1 $(\forall x\in\mathbb{R}),\ f(x)=\dfrac{e^x}{e^{2x}+e}$

Partie I

1a) Montrons que $(\forall x\in\mathbb{R}),\ f(1-x)=f(x)$

Soit $x\in\mathbb{R}$, on a

$$f(1-x)=\frac{e^{1-x}}{e^{2(1-x)}+e}=\frac{e\times e^{-x}}{e^2\times e^{-2x}+e}=\frac{e^{-x}}{e\times e^{-2x}+1}=\frac{\frac{1}{e^x}}{\frac{e+e^{2x}}{e^{2x}}}=\frac{e^x}{e^{2x}+e}$$

donc $\boxed{(\forall x\in\mathbb{R}),\ f(1-x)=f(x)}$

b) Interprétons graphiquement le résultat

on a : $(\forall x\in\mathbb{R}),\ (2\frac{1}{2}-x)\in\mathbb{R}$ et $(\forall x\in\mathbb{R}),\ f(2\frac{1}{2}-x)=f(x)$

donc la droite $x=\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe $(\mathcal{C}_f)$

c) Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ puis déduisons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

on a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{e^{2x}+e}=0$

Car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x}=\lim\limits_{X\to-\infty} e^X=0$ $(X=2x)$

donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

→ Déduisons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(1-x)$

on pose $X=1-x$ $(x\to+\infty \Rightarrow X\to-\infty)$ d'où.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(1-x)=\lim\limits_{X\to-\infty} f(X)=0$. Donc on obtient :

$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0}$$

TOTAL NOTE/PAGE

N.B : Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant révéler leur identité

NOTATION PARTIELLE

2

d) Interprétation graphique

La Courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ (Axe (Ox)) au voisinage de $\pm\infty$

2.a) Montrons que $(\forall x \in \mathbb{R})$, $f'(x) = f(x) \times \frac{1 - e^{2x-1}}{1 + e^{2x-1}}$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \left(\frac{e^x}{e^{2x}+e}\right)' = \frac{e^x(e^{2x}+e) - e^x \times 2e^{2x}}{(e^{2x}+e)^2}$$

$$= \frac{e^x(e^{2x}+e-2e^{2x})}{(e^{2x}+e)^2}$$

$$= \frac{e^x}{e^{2x}+e} \times \frac{e - e^{2x}}{e^{2x}+e}$$

$$= f(x) \times \frac{1 - e^{2x-1}}{1+e^{2x-1}}$$

donc $\boxed{(\forall x \in \mathbb{R}),\ f'(x) = f(x) \times \frac{1 - e^{2x-1}}{1+e^{2x-1}}}$

b) Les variations de f puis déduire $(\forall x \in \mathbb{R})$, $0 < f(x) < \frac{1}{2}$

Le signe de $f'(x)$ est Celui de $1 - e^{2x-1}$ sur $\mathbb{R}$ Car $(\forall x \in \mathbb{R})$, $\frac{f(x)}{1+e^{2x-1}} > 0$.

On a $1 - e^{2x-1} > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in]-\infty, \frac{1}{2}[$

$1 - e^{2x-1} < 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in]\frac{1}{2}, +\infty[$

$1 - e^{2x-1} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

donc :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2\sqrt{e}}$	$\searrow$	0

. Déduisons

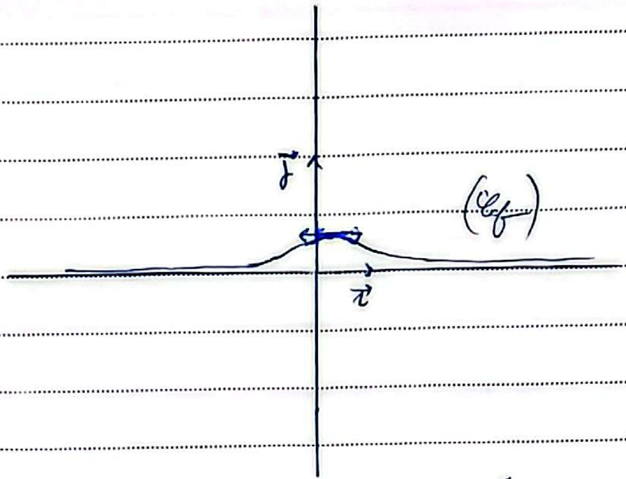
D'après le T.V de la fonction f on déduit $\frac{1}{2\sqrt{e}}$ est la valeur maximale absolue de la fonction f sur $\mathbb{R}$

donc $(\forall x \in \mathbb{R})$, $f(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{e}}$

or $\frac{1}{2\sqrt{e}} < \frac{1}{2}$ donc $(\forall x \in \mathbb{R})$, $f(x) < \frac{1}{2}$

et Comme $(\forall x \in \mathbb{R})$, $f(x) > 0$ donc $\boxed{(\forall x \in \mathbb{R})\ 0 < f(x) < \frac{1}{2}}$

TOTAL NOTE/PAGE



4 a) <u>Montrons que :</u> $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,dx$

on pose $X = 1 - x$ alors : $x = 1 - X$

donc $dX = -\,dx$ et : $\begin{cases} \text{si } x = 0 \text{ alors } X = 1 \\ \text{si } x = \frac{1}{2} \text{ alors } X = \frac{1}{2} \end{cases}$

donc obtient :

$f(1-X) =$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx = \int_1^{\frac{1}{2}} f(1-X)\,.(-\,dX) = -\int_1^{\frac{1}{2}} f(X)\,dX = \int_{\frac{1}{2}}^{1} f($$

donc $\boxed{\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,dx}$

b) <u>Déduisons</u> $\int_0^1 f(x)\,dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx$

On a : $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,dx$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx + \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx$$

donc : $\boxed{\int_0^1 f(x)\,dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx}$

5 a) <u>Montrons que :</u> $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{dt}{t^2+e}$.

on pose $t = e^x$, alors : $\begin{cases} \text{si } x = 0 \text{ alors : } t = 1 \\ \text{si } x = \frac{1}{2} \text{ alors : } t = \sqrt{e} \end{cases}$

et : $dt = e^x\,dx = t\,dx$ donc $dx = \frac{1}{t}\,dt$

d'où :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{e^x}{e^{2x}+e}\,dx = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{t}{t^2+e} \times \frac{1}{t}\,dt$$

$$= \int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{t^2+e}\,dt = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{dt}{t^2+e}$$

donc $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{dt}{t^2+e}$.

b) Montrons que $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{e}}\left(\arctan\sqrt{e} - \frac{\pi}{4}\right)$

On a $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{dt}{t^2+e}$

$$= \int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{e} \times \frac{1}{1+\frac{t^2}{e}}\,dt$$

$$= \frac{1}{e} \cdot \int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{e}}\right)^2}\,dt$$

$$= \frac{1}{e} \int_1^{\sqrt{e}} \frac{\frac{1}{\sqrt{e}}}{\frac{1}{\sqrt{e}}\left(1+\left(\frac{t}{\sqrt{e}}\right)^2\right)}\,dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{e}} \int_1^{\sqrt{e}} \frac{\left(\frac{t}{\sqrt{e}}\right)'}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{e}}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{e}} \left[\arctan\frac{t}{\sqrt{e}}\right]_1^{\sqrt{e}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{e}}\left(\arctan 1 - \arctan\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$$

$\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$

$$= \frac{1}{\sqrt{e}}\left(\frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{2} - \arctan\sqrt{e}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{e}}\left(\arctan\sqrt{e} - \frac{\pi}{4}\right)$$

donc : $\boxed{\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{e}}\left(\arctan\sqrt{e} - \frac{\pi}{4}\right)}$

c) soit $\mathcal{A}$ l'aire demandé, on a : $\mathcal{A} = \left(\int_0^1 |f(x)|\,dx\right) u.a$

on a $(\forall x \in [0,1])$, $f(x) > 0$ donc :

$$\int_0^1 |f(x)|\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx = \frac{2}{\sqrt{e}}\left(\arctan\sqrt{e} - \frac{\pi}{4}\right)$$

NOTATION PARTIELLE

5

et $u.a = \|\vec{i}\|.\|\vec{j}\| = 2\ cm^2$ donc $\boxed{\mathcal{A} = \frac{4}{\sqrt{e}}\left(\arctan\sqrt{e} - \frac{\pi}{4}\right) cm^2}$

Partie II $(\forall n \in \mathbb{N}),\ u_{n+1} = f(u_n)$

1) Montrons que $(\forall x \in \mathbb{R}),\ |f'(x)| \leq f(x)$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $|f'(x)| = |f(x)| \left|\frac{1-e^{2x-1}}{1+e^{2x-1}}\right| = f(x) \frac{|1-e^{2x-1}|}{1+e^{2x-1}}$

et comme $|1-e^{2x-1}| \leq 1+e^{2x-1}$ donc $\frac{|1-e^{2x-1}|}{1+e^{2x-1}} \leq 1$

d'où $f(x) \times \frac{|1-e^{2x-1}|}{1+e^{2x-1}} \leq f(x)$ par suite :

$$\boxed{(\forall x \in \mathbb{R}),\ |f'(x)| \leq f(x)}$$

2.a) Montrons que $\left(\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]\right),\ 0 \leq f'(x) < \frac{1}{2}$

On a $(\forall x \in \mathbb{R})\ |f'(x)| \leq f(x)$ or $(\forall x \in \mathbb{R}),\ 0 < f(x) < \frac{1}{2}$

donc $(\forall x \in \mathbb{R}),\ |f'(x)| < \frac{1}{2}$ implique que $(\forall x \in \mathbb{R})\ f'(x) < \frac{1}{2}$

d'où : $\left(\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]\right),\ f'(x) < \frac{1}{2}$ ①

D'autre part, on a $(\forall x \in \mathbb{R}),\ f'(x) = f(x) \times \frac{1-e^{2x-1}}{1+e^{2x+1}}$

or : $\left(\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]\right),\ 1 - e^{2x-1} \geqslant 0$ et comme $f(x) > 0\ \forall x$

d'où : $\left(\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]\right),\ f'(x) \geq 0$ ②

D'après ① et ② on déduit que $\boxed{\left(\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]\right),\ 0 \leq f'(x) < \frac{1}{2}}$

b) Montrons que g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$

$g'(x) = f'(x) - 1$

or $(\forall x \in \mathbb{R}),\ |f'(x)| \leq f(x)$ donc : $-f(x) \leq f'(x) \leq f(x)$

TOTAL NOTE/PAGE

NOTATION PARTIELLE

6

d'où : $-f(x)-1 \leq f'(x)-1 \leq f(x)-1$ et puisque $0 < f(x) < \frac{1}{2}$

donc $-1 < f(x)-1 < -\frac{1}{2}$ donc : $f'(x)-1 < 0$

d'où $(\forall x \in \mathbb{R}),\ g'(x) < 0$

c-à-d la fonction g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

c) Déduisons que $\left(\exists! \alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right[\right),\ f(\alpha) = \alpha$

La fonction g est continue et strictement décroissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et comme $\begin{cases} g(0) = \frac{1}{1+e} > 0 \\ g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{e}} - \frac{1}{2} < 0 \end{cases}$

donc $g(0) \times g\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ d'où d'après le T.V.I on déduit que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ tel que $g(\alpha) = 0$. Autrement dit :

$$\left(\exists! \alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right[\right),\ g(\alpha) = 0$$

or : $g(\alpha) = 0 \iff f(\alpha) = \alpha$ donc : $\boxed{\left(\exists! \alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right[\right),\ f(\alpha) = \alpha}$

3.a) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ 0 < u_n < \frac{1}{2}$

. Pour $n = 0$, on a : $u_0 \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ donc la proposition est vraie pour $n = 0$

. Soit $n \in \mathbb{N}$ On suppose que : $u_n \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ et on montre que $u_{n+1} \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$

on a $u_n \in \left]0, \frac{1}{2}\right[\Rightarrow 0 < u_n < \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow f(0) < f(u_n) < f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+e} < u_{n+1} < \frac{1}{2\sqrt{e}}$$

or $0 < \frac{1}{1+e}$ et $\frac{1}{2\sqrt{e}} < \frac{1}{2}$ donc : $0 < u_{n+1} < \frac{1}{2}$

d'où d'après le principe de récurrence $\boxed{(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 < u_n < \frac{1}{2}}$

b) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$

Soit $n \in \mathbb{N}$ on a :

. f est continue sur l'intervalle fermé d'extrémités u_n et α

TOTAL NOTE/PAGE

. La fonction f est dérivable sur l'intervalle ouvert d'extrémités u_n et α

Donc d'après le T A F, on déduit que

$$\left(\exists c \in \overleftrightarrow{]\alpha, u_n[}\right), \quad \frac{f(u_n) - f(\alpha)}{u_n - \alpha} = f'(c)$$

or $0 \leq f'(x) < \frac{1}{2}$ donc : $|f'(x)| < \frac{1}{2}$ d'où $|f'(c)| < \frac{1}{2}$

et comme $|f'(c)| = \left|\frac{f(u_n) - f(\alpha)}{u_n - \alpha}\right| < \frac{1}{2}$ d'où

$$\boxed{(\forall n \in \mathbb{N}), \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|}$$

c) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}), \quad |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

. Pour $n = 0$, on a $|u_0 - \alpha| < \frac{1}{2}$ donc la proposition est vraie pour $n = 0$

. soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ et on montre que : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$

on a $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ alors $\frac{1}{2}|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$

et comme $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$ donc $|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$

D'après le principe de récurrence $\boxed{(\forall n \in \mathbb{N}), \quad |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}$

d) Déduisons que (u_n) converge vers α

on a : $\lim \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \lim \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{1}{2} = 0$ car $-1 < \frac{1}{2} < 1$

donc d'après la propriété des limites et ordre on déduit que $\lim u_n = \alpha$ d'où la suite (u_n) converge vers α

Partie III $(\forall n \in \mathbb{N}^*), \quad S_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{e^{\frac{k}{n}} + e^{\frac{n-k}{n}}}$

1 a) Vérifions que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*), \quad S_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$S_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{e^{\frac{k}{n}} + e^{\frac{n-k}{n}}}$$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \times \frac{1}{e^{\frac{k}{n}} + e^{\frac{n-k}{n}}}$$

النقطة الجزئية

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \times \frac{1}{e^{\frac{k}{n}} + e^{1-\frac{k}{n}}}$$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \times \frac{e^{\frac{k}{n}}}{e^{2\frac{k}{n}} + e^{1}} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

d'où : $\boxed{(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad S_n = \frac{1}{(n+1)} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)}$

b) Montrons que $\int_0^1 x f(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx$

on pose : $t = 1 - x$ alors :

$t = 1 - x \iff x = 1 - t$

$dt = -dx \Rightarrow dx = -dt$

et : si $x = 0$ alors : $t = 1$, si $x = 1$ alors : $t = 0$

donc :

$$\int_0^1 x f(x)\,dx = \int_1^0 (1-t) f(1-t) \times (-dt)$$

$$= -\int_1^0 (1-t) f(1-t)\,dt$$

$$= \int_0^1 (1-t) f(t)\,dt \quad (f(1-t) = f(t))$$

$$= \int_0^1 f(t) - t f(t)\,dt$$

$$= \int_0^1 f(t)\,dt - \int_0^1 t f(t)\,dt$$

$$= \int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^1 x f(x)\,dx$$

$$= 2\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx - \int_0^1 x f(x)\,dx$$

donc $\int_0^1 x f(x)\,dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx - \int_0^1 x f(x)\,dx$

de plus : $2\int_0^1 x f(x)\,dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx$

donc : $\boxed{\int_0^1 x f(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx}$

مجموع نقط الصفحة

NOTATION PARTIELLE

9

2) Montrons que (S_n) est CV et déterminons sa limite

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$S_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \times f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \times \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \times \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} h\left(\frac{k}{n}\right)$$ / Avec $h(x) = x f(x)$

et comme la fonction h est continue sur $[0,1]$ donc :

$$\lim \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} h\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 h(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 x f(x)\,dx$$

$$= \int_0^{1/2} f(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{e}}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{e} - \frac{\pi}{4}\right)$$

donc $\lim \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} h\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{e}} \arctan\sqrt{e} - \frac{\pi}{4}$

et comme $\lim \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$ d'où :

$$\boxed{\lim S_n = \frac{1}{\sqrt{e}}\left(\arctan\sqrt{e} - \frac{\pi}{4}\right)}$$

d'où (S_n) est convergente et tend vers $\frac{1}{\sqrt{e}}\left(\arctan\sqrt{e} - \frac{\pi}{4}\right)$

~~Exercice 2~~ $\cancel{(E_\alpha) : z^2 - 2^\alpha e^{i\alpha}(1+2i)z + i2^{2\alpha+1} e^{2i\alpha} = 0}$

TOTAL NOTE/PAGE

N.B : Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant révéler leur identité

NOTATION PARTIELLE

10

Exercice 2

(E_α) : $z^2 - 2^\alpha e^{i\alpha}(1+2i)z + i\,2^{2\alpha+1}e^{i2\alpha} = 0$

$\alpha \in [0, 2\pi[$

Partie I

1 a) vérifions que : $\Delta_\alpha = \left(2^\alpha e^{i\alpha}(1-2i)\right)^2$

On a : $\Delta_\alpha = \left(-2^\alpha e^{i\alpha}(1+2i)\right)^2 - 4 \times 1 \times \left(i 2^{2\alpha+1} e^{i2\alpha}\right)$

$= 2^{2\alpha} e^{2i\alpha}(-3+4i) - 4i\,2^{2\alpha+1}e^{i2\alpha}$

$= -3\times 2^{2\alpha} e^{2i\alpha} + 4i\times 2^{2\alpha}e^{2i\alpha} - 4i\,2^{2\alpha+1}e^{i2\alpha}$

$= 2^{2\alpha}e^{2i\alpha}\left(-3+4i-8i\right)$

$= 2^{2\alpha}e^{i2\alpha}\left(-3-4i\right)$

$= 2^{2\alpha}e^{i2\alpha}(1-2i)^2 = \left(2^\alpha e^{i\alpha}(1-2i)\right)^2$

donc : $\boxed{\Delta_\alpha = \left(2^\alpha e^{i\alpha}(1-2i)\right)^2}$

b) Déduisons les deux solutions a et b de (E_α) Avec $|a| < |b|$

On a : $a = \dfrac{2^\alpha e^{i\alpha}(1+2i) + 2^\alpha e^{i\alpha}(1-2i)}{2}$

$= \dfrac{2^\alpha e^{i\alpha}(1+\cancel{2i}+1-\cancel{2i})}{2} = 2^\alpha e^{i\alpha}$

$b = \dfrac{2^\alpha e^{i\alpha}(1+2i) - 2^\alpha e^{i\alpha}(1-2i)}{2}$

$= \dfrac{2^\alpha e^{i\alpha}(\cancel{1}+2i-\cancel{1}+2i)}{2} = 2i\,2^\alpha e^{i\alpha} = i\,2^{\alpha+1}e^{i\alpha}$

d'où : $\boxed{a = 2^\alpha e^{i\alpha} \quad \text{et} \quad b = i\,2^{\alpha+1}e^{i\alpha}}$ Avec $|a| < |b|$

TOTAL NOTE/PAGE

NOTATION PARTIELLE

2) Vérifions que $\frac{b}{a} \in i\mathbb{R}$

On a : $\frac{b}{a} = \frac{i2^{\alpha+1}e^{i\alpha}}{2^{\alpha}e^{i\alpha}} = \frac{i2^{\alpha}\times 2\times e^{i\alpha}}{2^{\alpha}e^{i\alpha}} = 2i \in i\mathbb{R}$

donc : $\boxed{\frac{b}{a} \in i\mathbb{R}}$

Partie II $M(z)$ on pose $\frac{b}{a} = \lambda i$ avec $\lambda = \mathrm{Im}\left(\frac{b}{a}\right)$

17

1) On considère $A(a)$, $B(b)$ et $H(h)$

avec $\frac{1}{h} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

a) Montrons que : $\frac{h}{b-a} = -\left(\frac{\lambda}{\lambda^2+1}\right)i$

On a :

$$\frac{h}{b-a} = \frac{h}{a\lambda i - a} \quad (b = a\lambda i)$$

$$= \frac{h}{a} \times \frac{1}{\lambda i - 1}$$

$$= \frac{1}{\frac{a}{h}} \times \frac{1}{\lambda i - 1}$$

$$= \frac{1}{1+\frac{a}{b}} \times \frac{1}{\lambda i - 1} \quad \left(\frac{a}{h} = 1 + \frac{a}{b}\right)$$

$$= \frac{1}{1+\frac{1}{\lambda i}} \times \frac{1}{\lambda i - 1}$$

$$= \frac{\lambda i}{\lambda i + 1} \times \frac{1}{\lambda i - 1}$$

$$= \frac{\lambda i}{(\lambda i + 1)(\lambda i - 1)} = \frac{\lambda i}{-\lambda^2 - 1} = -\left(\frac{\lambda}{\lambda^2+1}\right)i$$

donc : $\boxed{\frac{h}{b-a} = -\left(\frac{\lambda}{\lambda^2+1}\right)i}$

• Déduisons que : $(OH) \perp (AB)$

On a : $\frac{h}{b-a} = -\left(\frac{\lambda}{\lambda^2+1}\right)i \Rightarrow \frac{h-0}{b-a} = \frac{\lambda}{\lambda^2+1} \times e^{-i\frac{\pi}{2}}$

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{h-0}{b-a}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OH}) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$$

d'où : $\boxed{(OH) \perp (AB)}$

TOTAL NOTE/PAGE

b) Montrons que : $\frac{h-a}{b-a} = \frac{1}{\lambda^2+1}$ puis déduisons que H, A et B sont alignés

On a : $\frac{h-a}{b-a} = \frac{h}{b-a} - \frac{a}{b-a}$

$= -\left(\frac{\lambda}{\lambda^2+1}\right)i - \frac{1}{\frac{b}{a}-1}$

$= -\left(\frac{\lambda}{\lambda^2+1}\right)i - \frac{1}{\lambda i-1}$

$= \frac{-\lambda i}{\lambda^2+1} + \frac{1}{1-\lambda i}$

$= \frac{-\lambda i}{\lambda^2+1} + \frac{1+\lambda i}{1+\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2+1}$

donc : $\boxed{\frac{h-a}{b-a} = \frac{1}{\lambda^2+1}}$

Déduisons que les pts H, A et B sont alignés

On a $\frac{1}{\lambda^2+1} \in \mathbb{R}$ donc $\frac{h-a}{b-a} \in \mathbb{R}$ d'où H, A et B sont alignés.

2) I(m) le milieu de [OH] et J(n) milieu [HB]

a) Montrons que $\frac{n}{m-a} = -\lambda i$

On a : $m = \frac{h+0}{2} = \frac{h}{2} = \frac{ab}{2(a+b)}$

$n = \frac{h+b}{2} = \frac{h}{2} + \frac{b}{2} = \frac{ab}{2(a+b)} + \frac{b}{2}$

$= \frac{2ab+b^2}{2(a+b)}$

donc :

$\frac{n}{m-a} = \frac{\frac{2ab+b^2}{2(a+b)}}{\frac{ab}{2(a+b)} - a}$

$= \frac{2ab+b^2}{ab-2a(a+b)} = \frac{2ab+b^2}{-ab-2a^2}$

$= -\frac{b}{a} \times \frac{2a+b}{b+2a} = \frac{-b}{a} = -\lambda i$

d'où : $\boxed{\frac{n}{m-a} = -\lambda i}$

b) Déduisons que : $(OJ) \perp (AI)$ et $OI = |\lambda| AI$

تنبيه : يمنع على المترشح(ة) الإمضاء أو وضع أي علامة يمكنها كشف هويته(ا)

النقطة الجزئية

On a : $\frac{n}{m-a} = -\lambda i \Rightarrow \frac{n-0}{m-a} = -\lambda i$

$\Rightarrow \frac{n-0}{m-a} = \lambda e^{-i\frac{\pi}{2}}$

$\Rightarrow \arg\left(\frac{n-0}{m-a}\right) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$

$\Rightarrow (\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{OJ}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$

donc : $\boxed{(AI) \perp (OJ)}$

On a $\frac{n}{m-a} = -\lambda i \Rightarrow \left|\frac{n}{m-a}\right| = |-\lambda i|$

$\Rightarrow \frac{|n-0|}{|m-a|} = |\lambda|$

$\Rightarrow \boxed{OJ = |\lambda| AI}$

c) soit K le pt d'intersection des droites (OJ) et (AI)

. Montrons que K, I, H et J sont cocycliques

On a : $(OJ) \perp (AI)$ et comme $K \in (OJ) \cap (AI)$

donc $(KI) \perp (KJ)$ donc $\frac{k-m}{k-n} \in i\mathbb{R}$ (1)

D'autre part, on a $(OH) \perp (AB)$ et comme H, A et B sont alignés donc : $(HB) \perp (OH)$

et puisque I milieu [OH] et J milieu [HB] donc $(HI) \perp (HJ)$ donc $\frac{h-n}{h-m} \in i\mathbb{R}$ (2)

d'après (1) et (2) on déduit que

$\frac{h-n}{h-m} \times \frac{k-m}{k-n} \in \mathbb{R}$ donc

$\boxed{\text{les pts K, I, H et J sont cocycliques}}$

مجموع نقط الصفحة

تنبيه : يمنع على المترشح(ة) الإمضاء أو وضع أي علامة يمكنها كشف هويته(ا)

NOTATION PARTIELLE

14

d) Montrons que $(IJ) \perp (OA)$

On a : $\dfrac{a}{n-m} = \dfrac{a}{\dfrac{2ab+b^2-ab}{2(a+b)}}$

$= \dfrac{2a(a+b)}{ab+b^2}$

$= \dfrac{2a(a+b)}{b(a+b)}$

$= \dfrac{2a}{b} = \dfrac{2}{\frac{b}{a}} = \dfrac{2}{\lambda i} = -\dfrac{2i}{\lambda}$

donc $\dfrac{a-0}{n-m} = -\dfrac{2i}{\lambda} \in i\mathbb{R}$ d'où $\boxed{(IJ) \perp (OA)}$

Exercice 4

1 a) Vérifions que $A^2 = -2A$

On a : $A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

or $-2A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ donc : $\boxed{A^2 = -2A}$

b) Déduisons que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ M(x) \times M(y) = M(x+y-2xy)$

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a

$M(x) \times M(y) = (I + xA)(I + yA)$

$= I^2 + yIA + xAI + xyA^2$

$= I + yA + xA - 2xyA$

TOTAL NOTE/PAGE

NOTATION PARTIELLE

$$= I + (x+y-2xy)A = M(x+y-2xy)$$

donc : $\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad M(x) \times M(y) = M(x+y-2xy)}$

2 a) Calculons $M\left(\frac{1}{2}\right) \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

on a :

$$M\left(\frac{1}{2}\right) \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(I + \frac{1}{2}A\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

15

donc $\boxed{M\left(\frac{1}{2}\right) \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

b) Déduisons que $M\left(\frac{1}{2}\right)$ n'est pas inversible dans $(M_3(\mathbb{R}), \times)$

Par l'absurde on suppose que $M\left(\frac{1}{2}\right)$ est inversible dans $(M_3(\mathbb{R}), \times)$ donc il existe une matrice N tel que :

$$M\left(\frac{1}{2}\right) \times N = N \times M\left(\frac{1}{2}\right) = I$$

et comme $M\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc

$$N \times M\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = N \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc :

$$I \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c-à-d : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ce qui est absurde ! on déduit que $M\left(\frac{1}{2}\right)$ n'est pas inversible dans $M_3(\mathbb{R}, \times)$

3) Montrons que $E \setminus \left\{M\left(\frac{1}{2}\right)\right\}$ est stable pour la multiplication dans $(M_3(\mathbb{R}), \times)$.

On a : $E \setminus \left\{M\left(\frac{1}{2}\right)\right\} \subset M_3(\mathbb{R})$

TOTAL NOTE/PAGE

Soit $M(x)$ et $M(y)$ deux éléments de $E\setminus\{M(\frac{1}{2})\}$ tels que $x \neq \frac{1}{2}$ et $y \neq \frac{1}{2}$.

on a : $M(x) \times M(y) = M(x+y-2xy)$

montrons que $M(x+y-2xy) \in E\setminus\{M(\frac{1}{2})\}$:

on montre que : $(x+y-2xy) \neq \frac{1}{2}$

On a : $\begin{cases} x \neq \frac{1}{2} \\ y \neq \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-\frac{1}{2} \neq 0 \\ y-\frac{1}{2} \neq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow (x-\frac{1}{2})(y-\frac{1}{2}) \neq 0$

$\Rightarrow -\frac{1}{2}(x+y-2xy-\frac{1}{2}) \neq 0$

Car $(x-\frac{1}{2})(y-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}(x+y-2xy-\frac{1}{2})$

$\Rightarrow x+y-2xy \neq \frac{1}{2}$

d'où $M(x+y-2xy) \in E\setminus\{M(\frac{1}{2})\}$ par suite

$\boxed{E\setminus\{\frac{1}{2}\} \text{ est stable pour la multiplication dans } M_3(\mathbb{R})}$

4) Montrons que : $(E\setminus\{M(\frac{1}{2})\}, \times)$ est un groupe commutatif

- On a $E\setminus\{\frac{1}{2}\}$ est stable pour "$\times$" dans $(M_3(\mathbb{R}), \times)$ donc "$\times$" est associative dans $(E\setminus\{\frac{1}{2}\}, \times)$.

- On a $I \in E\setminus\{M(\frac{1}{2})\}$ et comme I est l'élément neutre dans $(M_3(\mathbb{R}), \times)$ donc I est l'élément neutre dans $E\setminus\{M(\frac{1}{2})\}$.

Soit $M(x)$ et $M(y)$ deux éléments de $E\setminus\{M(\frac{1}{2})\}$ tels que :

On a :

$$M(x) \times M(y) = M(x+y-2xy) = M(y+x-2yx)$$
$$= M(y) \times M(x)$$

donc $\times$ est commutative dans $E\setminus\{M(\frac{1}{2})\}$.

Soit $M(x) \in E\setminus\{M(\frac{1}{2})\}$ et $M(y)$ son symétrique (s'il existe) dans $E\setminus\{M$

on a

$M(x) \times M(y) = I \Leftrightarrow M(x+y-2xy) = M(0)$

$\Leftrightarrow x+y-2xy = 0$

$\Leftrightarrow y = \frac{x}{2x-1} \neq \frac{1}{2}$

تنبيه: يمنع على المترشح(ة) الإمضاء أو وضع أي علامة يمكنها كشف هويته(ا)

puisque $\times$ est commutative alors : $M(y)\times M(x)=0 \Leftrightarrow y=\frac{x}{2x-1}$

Donc tout élément $M(x)$ de $E\setminus\{M(\frac{1}{2})\}$ admet $M\left(\frac{x}{2x-1}\right)$

comme symétrique par rapport à la loi $\times$.

D'où $\boxed{\left(E\setminus\{M(\frac{1}{2})\},\times\right) \text{ est groupe commutatif}}$

5) a) Montrons que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{R},+)$ vers (E,T)

On a : $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow E$

$x \longmapsto \varphi(x) = M\left(\frac{1-x}{2}\right)$

soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on a :

$\varphi(x+y) = M\left(\frac{1-x-y}{2}\right)$

On a $\varphi(x)\,T\,\varphi(y) = M\left(\frac{1-x}{2}\right)\,T\,M\left(\frac{1-y}{2}\right)$

$= M\left(\frac{1-x}{2}+\frac{1-y}{2}-\frac{1}{2}\right)$

$= M\left(\frac{1-x-y}{2}\right)$

donc : $(\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2)\quad \varphi(x+y)=\varphi(x)\,T\,\varphi(y)$

d'où φ est un homomorphisme de $(\mathbb{R},+)$ vers (E,T)

Montrons que $\varphi(\mathbb{R})=E$

on montre que φ est bijective de $\mathbb{R}$ vers E, c-à-d

$(\forall M\in\mathbb{R})\ (\exists! x\in\mathbb{R}),\ \varphi(x)=M$

soit $M(y)\in E$, on cherche x tel que : $\varphi(x)=M(y)$

On a : $\varphi(x)=M(y) \Leftrightarrow M\left(\frac{1-x}{2}\right)=M(y)$

$\Leftrightarrow \frac{1-x}{2}=y \Leftrightarrow x=1-2y$

donc : $(\forall M\in\mathbb{R})\ (\exists! x\in\mathbb{R})\ \varphi(x)=M$ donc φ est bijective de $\mathbb{R}$ vers E

d'où on déduit que : $\varphi(\mathbb{R}) = E$

b) Déduisons que (E,T) est un groupe Commutatif

On a φ est un homomorphisme de $(\mathbb{R},+)$ vers (E,T)

et comme φ est bijective de $\mathbb{R}$ vers E on déduit que φ est isomorphisme de $(\mathbb{R},+)$ vers (E,T). Or $(\mathbb{R},+)$ est un groupe Commutatif, alors (E,T) est un groupe Commutatif.

18

c) On a :

- (E,T) est un groupe Commutatif
- $\left(E \setminus \left\{M\left(\frac{1}{2}\right)\right\}, \times\right)$ est un groupe commutatif

$\left(\text{Avec } \varphi(0) = M\left(\frac{1}{2}\right) \text{ est l'élément neutre dans } (E,T)\right)$.

- montrons que loi "$\times$" est distributive par rapport à "T"

Soit $M(x)$, $M(y)$ et $M(z)$ des éléments de E, on a :

$$M(x) \times \left(M(y)\,T\,M(z)\right) = M(x) \times M\left(y+z-\frac{1}{2}\right)$$

$$= M\left(x+y+z-\frac{1}{2}-2x\left(y+z-\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$= M\left(x+y+z-\frac{1}{2}-2xy-2xz+x\right)$$

$$= M\left(2x+y+z-2xy-2xz-\frac{1}{2}\right)$$

Or :

$$M(x) \times M(y)\;T\;M(x) \times M(z) = M(x+y-2xy)\;T\;M(x+z-2xz)$$

$$= M\left(x+y-2xy+x+z-2xz-\frac{1}{2}\right)$$

$$= M\left(2x+y+z-2xy-2xz-\frac{1}{2}\right)$$

NOTATION PARTIELLE

donc $M(x) \times \left(M(y) \top M(z)\right) = M(x) \times M(y) \top M(x) \times M(z)$

de même on montre que :

$\left(M(y) \top M(z)\right) \times M(x) = M(y) \times M(x) \top M(z) \times M(x)$

donc on déduit que la loi $\times$ est distributive par rapport à la loi $\top$.

. La loi $\times$ est commutative dans E.

Conclusion $\boxed{(E, \top, \times) \text{ est un corps commutatif}}$

NOTATION PARTIELLE

20

Exercice 3

1) Montrons que : $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 [p]$ ou $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 [p]$

on a p est premier et $p \wedge a = 1$ donc d'après le th de Fermat $a^{p-1} \equiv 1 [p]$

or : p est impaire donc $\frac{p-1}{2} \in \mathbb{N}$.

on a : $a^{p-1} - 1 = \left(a^{\frac{p-1}{2}}\right)^2 - 1^2$
$= \left(a^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)\left(a^{\frac{p-1}{2}} + 1\right)$

or : $p / a^{p-1} - 1$ donc $p / \left(a^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)\left(a^{\frac{p-1}{2}} + 1\right)$

et comme p est premier $p / a^{\frac{p-1}{2}} - 1$ ou $p / a^{\frac{p-1}{2}} + 1$

d'où : $\boxed{a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 [p] \text{ ou } a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 [p]}$

2) On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation $ax^2 \equiv 1 [p]$. x_0 une solution de cette équation

a) Montrons que $x_0^{p-1} \equiv 1 [p]$

on a : $a x_0^2 \equiv 1 [p]$ alors $(\exists k \in \mathbb{Z})\ a x_0^2 = 1 + pk$

donc : $x_0 \times (a x_0) + p \times (-k) = 1$ d'où d'après le th BEZOUT $x_0 \wedge p = 1$

et comme p est premier alors d'après le th de Fermat

$\boxed{x_0^{p-1} \equiv 1 [p]}$

b) Déduisons que : $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 [p]$

on a : $a x_0^2 \equiv 1 [p]$ alors : $(a x_0^2)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 [p]$

donc $a^{\frac{p-1}{2}} x_0^{p-1} \equiv 1 [p]$

or $x_0^{p-1} \equiv 1 [p]$ donc : $a^{\frac{p-1}{2}} x_0^{p-1} \equiv a^{\frac{p-1}{2}} [p]$

donc : $\boxed{a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 [p]}$

3) soit $n \in \mathbb{N}^*$

a) Montrons que : $p / 2^{2n+1} - 1 \Rightarrow 2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 [p]$

on a $p / 2^{2n+1} - 1$ alors : $(\exists k' \in \mathbb{N})$, $2^{2n+1} - 1 = pk$

TOTAL NOTE/PAGE

N.B : Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant révéler leur identité

d'où $2^{2n+1} - pk' = 1$ d'où $2^{2n} \times 2 + p(-k') = 1$

donc d'après le th de BEZOUT on déduit que

$$2 \wedge p = 1$$

([illegible])

et comme $2 \times (2^n)^2 \equiv 1 [P]$ alors on applique le résultat 2-b on obtient :

$$2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 [P]$$

b) <u>Déduisons que</u> $(E) : 11x + (2^{2n+1} - 1) y = 1$ <u>admet au moins une solution dans $\mathbb{Z}^2$</u>

on a d'après la question précédente :

$$p / 2^{2n+1} - 1 \Rightarrow 2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 [P]$$

par contraposée on obtient :

$$2^{\frac{p-1}{2}} \not\equiv 1 [P] \Rightarrow p \not| \ 2^{2n+1} - 1$$

pour $p = 11$, on a $2^{\frac{11-1}{2}} \not\equiv 1 [11]$ donc $11 \not| \ 2^{2n+1} - 1$

c-à-d $11 \wedge (2^{2n+1} - 1) = 1$

et comme $11 \wedge (2^{2n+1} - 1) / 1$ donc (E) admet au moins une solution dans $\mathbb{Z}^2$

4) On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(F) : x^2 + 5x + 2 \equiv 0 [11]$

a) <u>Montrons que</u> $(F) \Leftrightarrow 2(2x+5)^2 \equiv 1 [11]$

Soit x solution de (F), on a

$$x^2 + 5x + 2 \equiv 0 [11] \Leftrightarrow 4x^2 + 20x + 8 \equiv 0 [11]$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 20x + 17 + 8 \equiv 17 [11]$$

$$\Leftrightarrow (2x+5)^2 \equiv 17 [11]$$

$$\Leftrightarrow 2(2x+5)^2 \equiv 34 [11]$$

$$\Leftrightarrow 2(2x+5)^2 \equiv 1 [11]$$

donc $\boxed{(F) \Leftrightarrow 2(2x+5)^2 \equiv 1 [11]}$

b) on suppose par l'absurde que (F) admet de solution dans $\mathbb{Z}$.

on a $(F) \Leftrightarrow 2(2x+5)^2 \equiv 1 [11]$

$\Leftrightarrow$ $2x+5$ est solution de l'équation $ax^2 \equiv 1\,[P]$ avec $a=2$

$p=11$

donc on applique le résultat de la question 2b on obtient :

$$2^{\frac{11-1}{2}} \equiv 1\,[11]$$

c-à-d $31 \equiv 0\,[11]$ ce qui est absurde

$\boxed{\text{Conclusion l'équation (F) n'admet pas de solution dans } \mathbb{Z}}$

FIN

Pr : yahya matioui